

第一周作业

46 蒋圩溟 519021911045

1.2 解

(1) 有:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 2\mathbf{i} \quad (2)$$

(2) 有:

$$v(t) = |\mathbf{v}| = \sqrt{4t^2 + 1}$$

切向加速度:

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

又:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \quad (3)$$

得法向加速度:

$$a_r(t) = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{4t^2 + 1}} \quad (4)$$

1.5 解

(1) 联解

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{cases}$$

得到

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

这是一个椭圆方程。质点在一个椭圆上沿逆时针方向运动。

(2) 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + b\omega \cos \omega t \mathbf{j} \end{aligned} \quad (6)$$

(3) 加速度:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - b\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} \quad (7)$$

注意到 \mathbf{a} 与位矢 $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$ 方向相反, 因此加速度指向原点。

1.6 解

(1) 质点以螺旋方式沿 z 轴上升。柱坐标系下的方程:

$$\begin{cases} r = R \\ z = \frac{h}{2\pi} \varphi \end{cases}$$

(2) 质点在 xOy 上做圆周运动, 在 z 轴方向上的速度为 $dz/dt = h\omega/2\pi$, 有:

$$v = \sqrt{(\omega R)^2 + \left(\frac{h\omega}{2\pi}\right)^2} \quad (8)$$

(3) 质点在 xOy 上做圆周运动, z 轴方向速度恒定, 则加速度大小:

$$a = \omega^2 R \quad (9)$$

1.8 解

可得运动微分方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t \quad (10)$$

该方程的通解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

代入 $t = 0$ 时 $v = 0, x = A$, 得到初值:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

有运动学方程:

$$x = A \cos \omega t \quad (11)$$

1.9 解

有:

$$ds = |d\mathbf{r}| \Rightarrow s = \int_{t_0}^{t_1} |d\mathbf{r}|$$
$$|d\mathbf{r}| = |(2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})dt| = 2\sqrt{t^2 + 1}dt \quad (12)$$

带入 $t_0 = 1s, t_1 = 3s$ 得到

$$s = \int_1^3 2\sqrt{t^2 + 1}dt = \ln\left(\frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{2} + 1}\right) - \sqrt{2} + 3\sqrt{10} \approx 9.01m \quad (13)$$

1.10 解

绳子是定长的, 因此小车到滑轮间的绳长 l' 和人与滑轮间的绳长 l 和为定值。

人与滑轮间的绳长为 $l := \sqrt{h^2 + r^2}$, 有约束:

$$l' + \sqrt{h^2 + r^2} = \text{Const.} \quad (14)$$

又由题意, 有:

$$\frac{dr}{dt} = u, \frac{d^2r}{dt^2} = 0, -\frac{dl'}{dt} = v$$

解上式可得:

$$v = \frac{ru}{\sqrt{h^2 + r^2}}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{u^2 h^2}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

1.11 解

与上题类似, 设滑轮到船的长度为 $l_0 := \sqrt{r^2 + h^2}$, 则岸上绳的长度为 $l' := l - l_0$ 。

由题意, 有 (规定船向左运动为正方向)

$$\frac{dl'}{dt} = u, \frac{d^2l'}{dt^2} = 0, -\frac{dr}{dt} = v$$

有约束:

$$l' + \sqrt{r^2 + h^2} = l = \text{Const.} \quad (16)$$

解上两式可得:

$$v = \frac{u\sqrt{h^2 + r^2}}{r}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{h^2 uv}{r^2 \sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{h^2 u^2}{r^3} \quad (17)$$